ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

1. Один заряд неподвижен. Рассмотрим точечный заряд q, находящийся в поле неподвижного точеного заряда Q. Попробуем получить выражение потенциальной энергии системы, доказав тем самым, что сила Кулона консервативна. Поскольку данная сила не является постоянной, нам придется считать элементарную работу, затем интегрировать. Рассмотрим некоторое промежуточное положение заряда и выберем ось X так, как показано на рисунках, начало координат выберем в точке расположения заряда Q. Элементарная работа силы Кулона:

$$\delta A = \vec{F}_{\text{кул}} d\vec{s} = F_x dx = k\frac{qQ}{x^2}dx, \tag{1}$$

где $dx = x_{i+1} - x_i$ — малое приращение координаты x. Как можно видеть из рис. 2, в силу

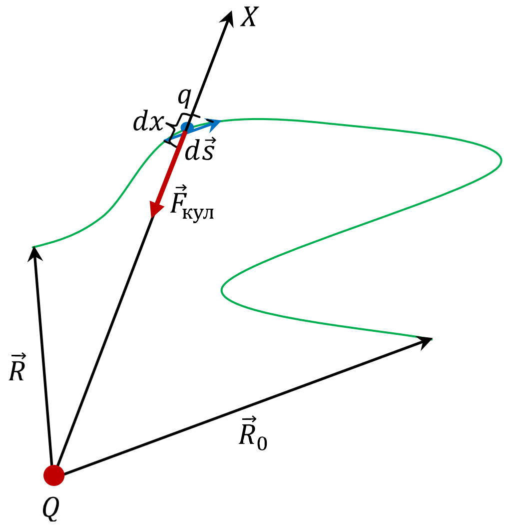

Рис. 1

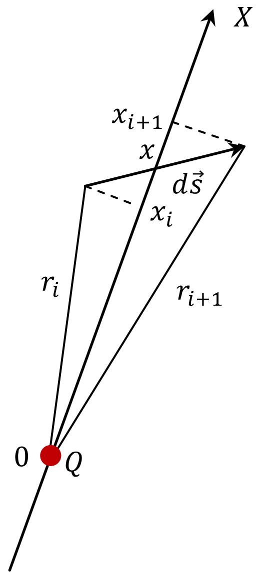

Рис. 2

малости ds,

$$\frac{dx}{x^2} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} \cdot x_i} = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \approx \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}, \tag{2}$$

где r_i и r_{i+1} — расстояние между зарядами, соответственно, в предыдущий и последующий моменты времени. Относительную погрешность соотношения (3), как всегда в таких случаях, можно сделать сколь угодно малой, поэтому, полученный нами результат окажется абсолютно точным, если не будет зависеть от степени приближения. Таким образом, согласно определению потенциальной энергии

$$W(R) = \int\limits_{r=R}^{r=R_0} kqQ\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) = kqQ\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right). \tag{3}$$

В последнем соотношении $r_1 = R$, а $r_n = R_0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)=\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\ \ldots+\frac{1}{r_{n-2}}-\frac{1}{r_{n-1}}+\frac{1}{r_{n-1}}-\frac{1}{R_0}. \tag{4}$$

Легко видеть, что в (4) пропадают все члены, кроме первого и последнего. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), получим искомое выражение потенциальной энергии точечного заряда в поле неподвижного точечного заряда:

$$W(R)=k\frac{qQ}{R}-k\frac{qQ}{R_0}. \tag{7}$$

Величина

$$C=-k\frac{qQ}{R_0} \tag{8}$$

не зависит от R, стало быть, является константой. Для любой пары зарядов она определяется нулевым положением, и может принимать различные значения. Выбор же нулевого положения, как правило, не принципиален. Поэтому (7) можно представить в виде

$$W(R)=k\frac{qQ}{R}+C. \tag{9}$$

Наконец, $W(R)$ максимально упростится при $C=0$. Где при этом окажется нулевое положение? Очевидно, при любом конечном значении R_0, $C\neq 0$. Однако

$$\lim_{R_0\to\infty} C=0.$$

Но для этого случая нам придется модифицировать определение потенциальной энергии:

$$W(R)\overset{\text{def}}{=}\lim_{R_0\to\infty} A_{R\to R_0}^{F_{\text{кул}}}. \tag{10}$$

Обратите внимание, что стрелки в (10) имеют разный смысл. $R\to R_0$ означает перемещение заряда q из точки на расстоянии R в точку на расстоянии R_0 от заряда Q. В свою очередь под знаком предела указывается, что R_0 именно стремится к бесконечности. При этом $A_{R\to R_0}^{F_{\text{кул}}}$можно сделать сколь угодно близкой к $W(R)$, благодаря тому, что R_0 можно сделать сколь угодно большим — такова суть предела на бесконечности.

Итак, при выборе нулевого положения на бесконечности, потенциальная энергия электростатического взаимодействия пары зарядов определяется соотношением:

$$W(R)=k\frac{qQ}{R}. \tag{10}$$

2. Оба заряда подвижны.

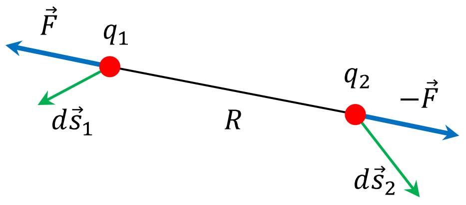

Рис. 3

Пусть на заряд q_1 действует сила $\vec{F}$. Тогда, по третьему закону Ньютона на заряд q_2 будет действовать сила $-\vec{F}$. Стало быть, совместная элементарная работа этих сил над зарядами определяется соотношением:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{s}_1 - \vec{F} d\vec{s}_2 = \vec{F}(d\vec{s}_1 - d\vec{s}_2) = \vec{F} d\vec{s}_{12}, \qquad (11)$$

где $d\vec{s}_{12} = d\vec{s}_1 - d\vec{s}_2$ — перемещение первого заряда относительно второго. Стало быть, мы можем решать задачу в системе отсчета, связанной с одним из зарядов, тем самым сведя ее к предыдущему случаю. В конечном ответе у нас будет расстояние между зарядами, которое от выбора системы отсчета не зависит, поэтому и вид ответа будет точно таким же:

$$W(R) = k\frac{q_1 q_2}{R} + C. \qquad (9)$$

Надо, однако, помнить, что приближение электростатики применимо только если скорости движения зарядов малы по сравнению со скоростью распространения электромагнитного поля, то есть скоростью света.