

ВЫВОД КПД ЦИКЛА КАРНО

1. Термодинамическая энтропия.

Как известно, малое тепло, подведенное к системе, принято обозначать символом δQ , а малое изменение ее внутренней — символом dU . В чем смысл подобного различия в обозначениях? Величину dU математики называют *полным дифференциалом*, а я бы назвал ее *истинной разностью*, и вот почему. dU — это действительно разность близких друг к другу значений внутренней энергии системы, например, газа. И если, переведя систему из состояния 1 в состояние 2, мы просуммируем приращения внутренней энергии, полученные ей на всех частях участка $1 \rightarrow 2$, то мы получим полное приращение внутренней энергии системы:

$$\int_{\text{сост.1}}^{\text{сост.2}} dU = \Delta U = U_2 - U_1 \quad (2)$$

При этом не имеет никакого значения процесс, посредством которого мы изменили состояние системы: важно только ее начальное и конечное состояние. И это не удивительно, ведь внутренняя энергия является функцией параметров состояния газа, проще говоря — функцией состояния.

Является ли функцией состояния количество тепла? Согласно первому закону термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (3)$$

Отсюда видно, что количество тепла функцией состояния не является. Рассмотрим, однако, малую величину δS , задаваемую соотношением

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} \quad (4)$$

Применим первый закон термодинамики, формулу внутренней энергии и работы идеального газа, а также уравнение Менделеева—Клапейрона:

$$\delta S = \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{i}{2} \nu R \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} \quad (5)$$

Тогда

$$\int_{\text{сост.1}}^{\text{сост.2}} \delta S$$

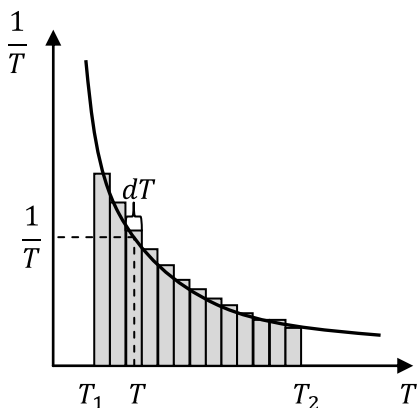


Рис. 1

Интегралы, записанные в (7) являются площадями под гиперболами (произносить ли страшное слово «логарифм» — смотрим по ситуации). К моменту изложения данной темы, лицеисты-десятиклассники уже хорошо знакомы с площадями под графиком и знают в чем их сходство и отличие от геометрических площадей. Но, при наличии

выражения массового непонимания на лицах слушателей, можно еще раз изобразить этот хитрый объект в виде рис. 1. Поскольку ограничивающая криволинейную трапецию обратная пропорциональность всегда имеет коэффициент 1, то ясно, что площадь трапеции зависит только от начального и конечного значений температуры:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = f(T_1; T_2) \quad (8)$$

Аналогично

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = f(V_1; V_2) \quad (9)$$

Но, поскольку в течение цикла газ возвращается в исходное состояние, то (8) и (9) в точке его завершения обращаются в нуль. Таким образом

$$\oint \delta S = 0 \quad (10)$$

Итак, мы пришли к выводу, что

$$\int_{\text{сост.1}}^{\text{сост.2}} \delta S = S(V_1; T_1; V_2; T_2) \quad (11)$$

Если теперь рассматривать V_1 и T_1 как постоянные, а V_2 и T_2 — как переменные, то можно написать, что

$$S = S(V; T) \quad (12)$$

Таким образом, S , как и внутренняя энергия, является функцией состояния газа, и называется в термодинамике *энтропией*. Для любого состояния газа она получается путем суммирования слагаемых типа (4), начиная с некоторого выбранного состояния. Тогда само (4) является не чем иным, как элементарным приращением энтропии при переходе из одного состояния в другое:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (13)$$

Это все, что нам нужно знать об энтропии для вычисления КПД Цикла Карно.

2) КПД цикла Карно.

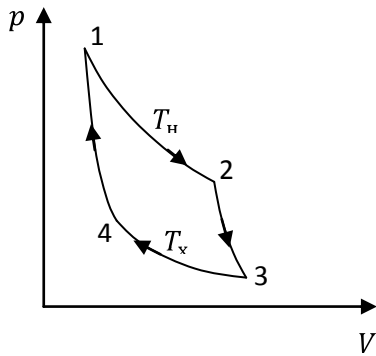


Рис. 2

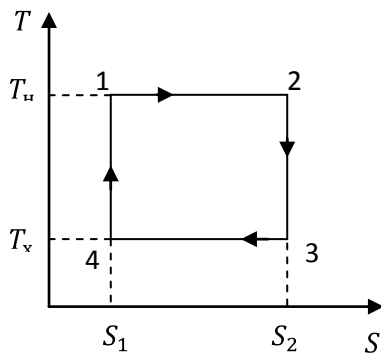


Рис. 3

N

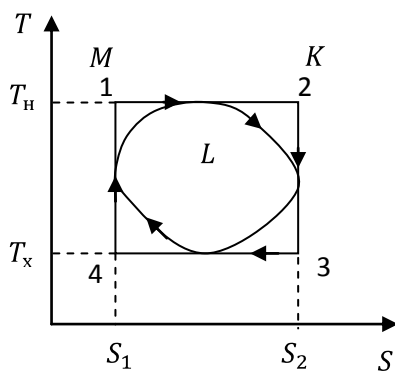


Рис. 4

Для наглядности, изобразим график цикла Карно сначала в привычных p — V -координатах (рис. 2). Это практически никого не удивляет. А теперь попросим учащихся изобразить этот же график в... T — S -координатах. Первая (и ожидаемая) реакция — ступор. Но стоит обратить внимание на то, что участок передачи тепла нагревателем — изотерма, тут же, становится ясно, что 1-2 и 3-4 надо проводить горизонтально. На адиабатах — снова заминка. Но, опять же, стоит обратить внимание на (13) (а в адиабатном процессе $Q = 0$ (!)) и целый хор голосов сразу говорит, как строить адиабаты в новых координатах. И вот на доске появляется рис. 3. На данном этапе он нужен больше для наглядности, но здесь хорошо виден и принципиальный момент. Если бы мы не доказали, что энтропия — функция состояния газа, то не имели бы право замкнуть цикл Карно в T — S -координатах. Теперь же из (13) и рис. 3 ясно видно, что

$$Q_H = T_H(S_2 - S_1), \quad (11)$$

а

$$Q_X = T_X(S_2 - S_1). \quad (12)$$

Стало быть, КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}. \quad (13)$$

Это и есть искомая формула. Также полезно, заметить, что суммарное тепло, переданное газу в произвольном процессе, с учетом знака, обусловленного направлением процесса, равно площади под его графиком в T — S -координатах. Если мы теперь вокруг случайно нарисованного замкнутого цикла опишем цикл Карно (рис. 4) то увидим, что в «случайном» цикле тепло Q_{MNK} , полученное от нагревателя, меньше, а тепло Q_{KLM} , отданное холодильнику — больше, чем соответствующие теплоты цикла Карно (рис. 4). Осознав это,

ученики приходят к выводу о максимальной КПД цикла Карно при данных предельных значениях температур нагревателя и холодильника. Можно, также нарисовать какой-нибудь амёбообразный цикл, в котором будет присутствовать множество участков с положительной и отрицательной теплоотдачей. Но, очевидно, его можно разбить адиабатами на простые циклы (в T — S -координатах адиабаты вертикальны!) для каждого из которых остаются в силе только что проделанные рассуждения. При объединении каждой пары соседних простых циклов получится цикл, КПД которого не выше максимального из двух, но ниже КПД цикла Карно.